

## JHS 184 Kiintopistemittaus EUREF-FIN-koordinaattijärjestelmässä

### Liite 2. Pienimmän neliösumman tasoituksen jäännösvirheiden ja painoyksikön varianssin tulkinta

Versio: 1.0

Julkaistu: 5.12.2012

Voimassaoloaika: toistaiseksi

---

#### Ovatko havaintojen jäännösvirheet odotusten mukaisia? Onko joukossa poikkeavan suuria jäännösvirheitä?

Jos tasoituksessa on useita erilaisia havaintosuureita, kannattaa tutkia standardisoituja jäännösvirheitä, jotka on skaalattu olettaen, että havaintovirheet ovat normaalijakautuneita,  $N(0,1)$ -jakaumaan.

Standardisoitu residuaali on havainnon residuaali jaettuna residuaalin keskivirheellä.

$$v_{std} = \frac{v}{\sigma_v}$$

Poikkeavana havaintona voidaan pitää sellaista havaintoa, jonka standardisoitu jäännösvirhe on itseisarvoltaan suurempi kuin 2.8 (raja voidaan yleensä asettaa tasoitusohjelman parametreja säätämällä, mutta yleensä oletusarvot ohjelmissa toimivat hyvin, eikä niitä ole tarpeen muuttaa). Arvo 2.8 vastaa tasoitusohjelmaan asetettujen riskitasojen arvoja  $\alpha = 0.05$  (5%) ja  $\beta = 0.2$  (20%), kun käytetään Baardan data snooping –menetelmää, jossa oletetaan painoyksikön varianssi tunnetuksi ja havaintovirheet normaalijakautuneiksi.  $\alpha$  tarkoittaa riskiä hylätä kelvollinen havainto ja  $\beta$  riskiä hyväksyä kelvoton. Joissakin ohjelmissa voi valita, annetaanko suoraan raja-arvo standardisoidulle residuaalille vai lasketaanko arvo  $\tau$ -jakauman mukaisesti, jolloin arvoon vaikuttaa havaintojen ja tuntemattomien parametrien lukumäärä ja standardisoitujen residuaalien laskennassa käytetään tasoituksessa estimoitua painoyksikön varianssia. Mikäli ohjelma laskee redundanssiluvut, osoittaa poikkeavan havainnon redundanssiluku (korreloimattomien havaintojen tapauksessa) sen osan, mikä mahdollisesta karkeasta virheestä jäännösvirheessä näkyy. Poikkeavien havaintojen poistaminen kannattaa tehdä harkiten. Jos redundanssiluku on alle 0.5, voi virhe olla muuallakin kuin ko. havainnossa.

#### Onko tasoituksesta laskettu painoyksikön keskivirhe tai sen neliö, varianssi odotusten mukainen eli vastaako se sellaisen havainnon, jonka paino on yksi (painoyksikkö), keskivirhettä (tai varianssia)?

Painoyksikön keskivirhe on yksi silloin, kun painomatriisi on havaintojen kovarianssimatriisin käänteismatriisi. Korreloimattomien havaintojen tapauksissa tämä tarkoittaa sitä, että painot ovat kääntäen verrannollisia variansseihin ja varianssin käänteisluku on paino. Jos kovarianssimatriisi kerrotaan jollakin luvulla ennen kääntämistä, on tämä luku painoyksikön varianssi ja tasoituksesta saatua painoyksikön varianssia on verrattava tähän lukuun. Joskus, kun tasoituksessa on useita erilaisia havaintosuureita (esimerkiksi kulmia ja etäisyyksiä), voidaan painoyksiköksi valita yksi havaintosuure, jolloin tasoituksesta saatu keskivirhe on ko. havaintosuureen keskivirheen estimaatti. On kuitenkin suositeltavaa painottaa havainnot myös takymetriverkoissa yksilöllisesti eikä havaintotyypeittäin, jos laskentaohjelma antaa tähän mahdollisuuden.

Usein on helpointa käyttää painoyksikön varianssille arvoa yksi (mikä siis tarkoitti, että kovarianssimatriisia ei ole kerrottu millään luvulla), varsinkin jos havaintoja painotetaan yksilöllisesti. Silloin tasoituksesta saatua painoyksikön varianssin tulisi olla lähellä sitä. Useat GNSS-vektoriverkon tasoitukset vertaavat painoyksikön varianssia ykköseen.

## JUHTA - Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta

Vaaitusverkossa painoyksiköksi on ollut tapana valita yhden kilometrin vaaitusta vastaava havainto. Jos painot on tällöin saatu vaaittujen matkojen käänteislukuina, saadaan tasoituksesta estimaatti kilometrikeskivirheelle.

Tasoiusohjelmien vakiovarusteisiin kuuluu khi-toiseen testi, jossa nollahypoteesina on: tasoituksesta saatu painoyksikön varianssi on sama kuin painoyksikön varianssi ennen tasoitusta. Vastahypoteesina on: tasoituksesta saatu painoyksikön varianssi ei ole sama kuin ennen tasoitusta.

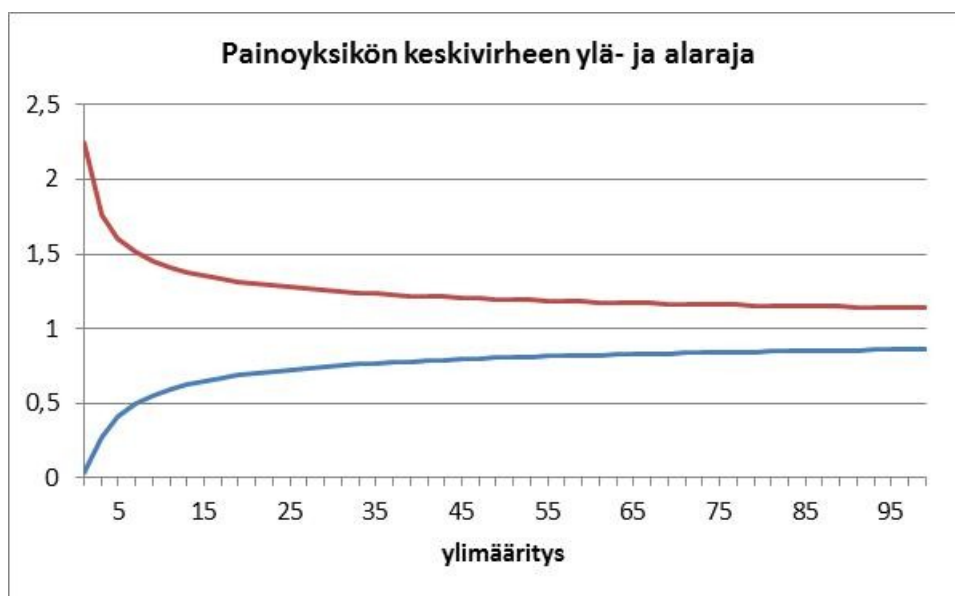
Kuinka paljon painoyksikön varianssi saa poiketa ennen tasoitusta annetusta arvosta, riippuu tasoituksen redundanssista eli ylimääräisten havaintojen lukumäärästä oheisen kuvan mukaisesti. Testisuure:

$$\chi^2 = \frac{v^T P v}{\sigma_0^2} \sim \chi_r^2$$

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuure

$$\chi^2 > \chi_{r,1-\alpha/2}^2 \quad \text{tai} \quad \chi^2 < \chi_{r,\alpha/2}^2$$

Nollahypoteesin hylkäys johtuu joko siitä, että havaintojen joukossa on poikkeavia havaintoja tai karkeita virheitä sisältäviä havaintoja tai siitä, että havaintojen keskinäinen painotus ei ole oikein. Mikäli havaintojen joukossa ei ole selvästi hylättäviksi tuomittavia havaintoja, johtuu liian suuri painoyksikön varianssi ehkä siitä, että havaintojen varianssit ovat liian optimistisia. Tällöin kertomalla havaintojen kovarianssimatriisit saadulla painoyksikön varianssilla saadaan mahdollisesti realistisemmat arviot havaintojen tarkkuudelle. Tällöin havaintojen keskinäinen painotus ei muutu eikä tasoitusta tarvitse tehdä uudelleen. Jos tasoituksen redundanssi on pieni (alle 10), ei estimoitu painoyksikön varianssi välttämättä ole luotettava. On mahdollista, että vain osan havainnoista kovarianssimatriisit vaativat skaalaamista eli havaintojen keskinäinen painotus muuttuu. Painotuksen muuttaminen ei usein muuta kovinkaan paljon itse tasoituksen tulosta, mutta jos on perusteita epäillä osaa havainnoista epävarmimmiksi, voidaan näin tehdä. Ainakin jäännösvirheet menevät oikeaan osoitteeseen.



**Kuva 1. Painoyksikön keskivirheen ja ylimäärityksen suhde.**

Useimmat tasoiusohjelmat osaavat merkitä karkeiksi virheiksi epäiltävät havainnot. Ohjelman käyttäjän tehtäväksi jää hylkäys tai hyväksyminen. Jos hylättäviä on tasoituksessa useita, kannattaa havaintoja poistaa yksitellen ja uusia tasoius. Usein auttaa, kun hylkää vain sen havainnon tai GNSS-vektoriverkon tapauksessa sen vektorin, jossa on suurin standardisoitu residuaali – muut ”karkeat virheet” saattavat poistua tuloksista uusintatasoiutuksessa. Virheen syy on kuitenkin hyvä pyrkiä selvittämään ennen hylkäystä. Jos

## **JUHTA - Julkisen hallinnon tietohallinnon neuvottelukunta**

verkon rakenne kärsii hylkäyksestä, eikä näin ollen vastaa esimerkiksi ohjeen mukaista verkon rakennetta, täytyy tehdä uusintamittauksia.

Kun havaintojen määrä kasvaa, täytyy havaintoja hylätä tiettyjen kriteerien mukaan automaattisesti (esimerkiksi standardisoidujen jäännösvirheiden perusteella). Tällöin käytettävän tasoitusohjelman perusteellinen tuntemus auttaa asiaa. Huomio kannattaa kiinnittää hylättyjen havaintojen määrään. Jos niitä on paljon, on selvítettävä, mistä hylkäykset johtuvat. Tasoittaminen on iteratiivista toimintaa eikä valmista tule välttämättä yhdellä napin painalluksella. Lisätietoja löytyy esimerkiksi Kallio, U. (1998).